Домашно №1, Задача 3 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

7 Април 2023

(i) Подточка

Всички пермутации $\tau \in S_6$, които са спрегнати с σ, са всички единични цикли с дължина 6. Тогава, знаем че $\text{Supp}(\tau) := \{i \mid \tau(i) \neq i\}$ се състои от 6 различни елемента. Тоест, за един цикъл с 6 елемента $a_1, a_2, ..., a_6 \in \{1, ..., 6\}$, знаем че $\tau(a_i) \in \{1, ..., 6\} \setminus \{a_i\}$. Следователно, за a_1 имаме 5 възможности, за a_2 имаме 4 възможности ($\tau(a_2) \in \{1, ..., 6\} \setminus \{a_1, a_2\}$) и так. нат. от което следва че броят такива цикли е $5! = 120$.

(ii) Подточка

Ще дадем примери за ρ_1 и ρ_2, които имат независими цикли:

$$\text{Нека } \rho_1 = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 6), \text{ord}((1)(2\ 3)(4\ 5\ 6)) = [\text{ord}((2\ 3)), \text{ord}((4\ 5\ 6))] = [2, 3] = 6$$
$$\rho_2 = (2)(1\ 3)(4\ 5\ 6), \text{ напълно аналогично } \text{ord}((2)(1\ 3)(4\ 5\ 6)) = 6$$

(iii) Подточка

Пермутации от ред 3 са всички тези с един цикъл с дължина 3 или с умножение на два независими цикъла с дължина 3. Такива цикли имат две инверсии, тоест и в двата случая пермутациите са четни.

Разглеждаме броя на цикли с дължина 3. Следвайки същата логика от **(i)**, $\text{Supp}(\rho)$ се състои от 3 различни елемента $n_1, n_2, n_3 \in \{1, ..., 6\}$, за един цикъл с 3 елемента $a_1, a_2, a_3 \in \{n_1, n_2, n_3\}$, знаем че $\rho(a_i) \in \{n_1, n_2, n_3\} \setminus \{a_i\}$ и следователно за a_1 имаме 2 възможности и a_2 и a_3 се определят еднозначно. Можем да направим общо $\binom{6}{3} = 20$ на брой избора за n_1, n_2, n_3. Следователно за всеки избор на 3 елемента можем да направим 2 цикъла с дължина 3, което са общо $20.2 = 40$ на брой.

Разглеждаме броя на умножения на два независими цикъла с дължина 3. При първия от двата вече показахме, че имаме 40 бройки, като нека при него $a_1, a_2, a_3 \in \{n_1, n_2, n_3\}$. Тогава за втория, аналогично имаме, че $a_1', a_2', a_3' \in \{n_1', n_2', n_3'\}$, обаче $n_1', n_2', n_3' \in \{1, ..., 6\} \setminus \{n_1, n_2, n_3\}$. Тоест, n_1', n_2', n_3' се определят еднозначно и имаме по две възможности за втория цикъл спрямо всеки избор на първия цикъл. Това са общо $40.2 = 80$ възможни цикли.

Следователно, има общо $40 + 80 = 120$ на брой четни цикъла от ред 3.

(iv) Подточка

В **(iii)** показахме, че всички пермутации от ред 3 са четни. Тоест, броят на нечетните е нула.